上級計量経済学2011年度　練習問題2　解答例

吉村有博[*]　岩倉相雄[†]　柳貴英[‡]

平成24年1月26日

1 Binary choice

一次微分については通常のベクトル微分の操作により自然に導出できる。二次微分については以下に、簡略的な導出過程を示す。

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \log L(\hat{\beta})}{\partial\beta\partial\beta'} &= \sum_{i=1}^{n}\left[fx\frac{\partial}{\partial\beta'}\left(\frac{y-F}{F(1-F)}\right)+\frac{y-F}{F(1-F)}x\frac{\partial f}{\partial\beta'}\right]\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[fx\left(\frac{-fx'}{F(1-F)}-\frac{y-F}{(F(1-F))^2}(1-2F)fx'\right)+\frac{y-F}{F(1-F)}f'xx'\right]\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{-1}{F(1-F)}-\frac{y^2-F}{(F(1-F))^2}(1-2F)\right)f^2xx'+\frac{y-F}{F(1-F)}f'xx'\right]\\ &= -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(y-F)^2}{(F(1-F))^2}\right)f^2xx'+\sum_{i=1}^{n}\frac{y-F}{F(1-F)}f'xx'\\ &= \text{講義ノート (67) 式.}\end{aligned} \tag{1}$$

途中、$y_i = y_i^2$ を用いていることに気をつける。

2 Logit

2.1

講義ノートの p.47 参照。

2.2

ロジットモデルは分布関数を $\Lambda(\beta' x_i) \equiv \frac{\exp(\beta' x_i)}{1+\exp(\beta' x_i)}$ と特定化したケースであるので、講義ノート p.48 にある尤度関数にこれを代入することで、

$$\log L(\beta) = \prod_{i=1}^{n}\Lambda(\beta' x_i)^{y_i}\{1-\Lambda(\beta' x_i)^{y_i}\}^{1-y_i}. \tag{2}$$

2.3

講義ノートの Theorem 23 参照。

[*]京都大学大学院経済学研究科 博士課程 1 年 yoshimura.a@hy2.ecs.kyoto-u.ac.jp
[†]京都大学大学院経済学研究科 博士課程 1 年 pollywantsacracker0808@yahoo.co.jp
[‡]京都大学大学院経済学研究科 修士課程 2 年 tkhd.yanagi@gmail.com

2.4

これも講義ノート Proposition 9 の十分条件を示せばよいが、Theorem24 を参照。漸近分散は、$I(\beta_0)^{-1}$ を計算すればよい。これは、(68) 式から、$I(\beta_0) = -E[H(y_i, x_i; \beta_0)] = E[\Lambda(\beta_0' x_i)\{1 - \Lambda(\beta_0' x_i)\} x_i x_i']$ より、$I(\beta_0)^{-1} = E[\Lambda(\beta_0' x_i)\{1 - \Lambda(\beta_0' x_i)\} x_i x_i']^{-1}$.

3 Tobit

3.1

トービットモデルとは制限従属変数モデルの一つで、被説明変数がある閾値より大きい場合、その値がそのまま観測されるが、ある閾値以下の個体に関してはすべて 0 として観測されるモデルである。この場合、通常の線形回帰モデルとして扱うとバイアスが生じてしまうため、プロビットモデルやロジットモデルの枠組みのように主に最尤法で推定することになる。

3.2

トービットモデルでの回帰関数 $E(y_i|x_i)$ を導出する。まず、$\epsilon_i|x_i \sim N(0, \sigma^2)$ を仮定する。繰り返し期待値の法則と、p.53 で与えられた切断された分布の期待値より、

$$\begin{aligned}
E(y_i|x_i) =& E[y_i^*|x_i, y_i^* \geq 0]P(y_i^* \geq 0|x_i) + 0 \times P(y_i^* < 0|x_i) \\
=& \{x_i'\beta + E(\epsilon_i|x_i, x_i'\beta + \epsilon_i \geq 0)\}P(x_i'\beta + \epsilon_i \geq 0|x_i) \\
=& \{x_i'\beta + \sigma\lambda(\frac{-x_i'\beta}{\sigma})\}P(\frac{\epsilon_i}{\sigma} \geq \frac{-x_i'\beta}{\sigma}|x_i) \\
=& \{x_i'\beta + \sigma\frac{\phi(\frac{-x_i'\beta}{\sigma})}{1 - \Phi(\frac{-x_i'\beta}{\sigma})}\}(1 - \Phi(\frac{-x_i'\beta}{\sigma})) \\
=& \{x_i'\beta + \sigma\frac{\phi(\frac{x_i'\beta}{\sigma})}{\Phi(\frac{x_i'\beta}{\sigma})}\}\Phi(\frac{x_i'\beta}{\sigma}) \\
=& \Phi(\frac{x_i'\beta}{\sigma})x_i'\beta + \sigma\phi(\frac{x_i'\beta}{\sigma}).
\end{aligned} \tag{3}$$

ただし、ここで標準正規密度関数の対称性から言える $\phi(a) = \phi(-a)$ と $1 - \Phi(-a) = \Phi(a)$ を用いている。

3.3

講義ノートの p.54-55 参照。

3.4

講義ノートの p.55-56 参照

4 FE vs RE

講義ノート参照

5　FE-1

ι と D と M_D を講義ノート通りに定義する。まず、$\hat{\beta}_{FE}$ を次のように書き直しておく。

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{FE} &= (X'M_DX)^{-1}X'M_DY\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(X_i(I_T-\iota(\iota'\iota)^{-1}\iota')X_i'\right)^{-1}X_i(I_T-\iota(\iota'\iota)^{-1}\iota')y_i\\ &=: \sum_{i=1}^{n}\left(X_i'Q_TX_i\right)^{-1}X_i'Q_Ty_i\end{aligned}$$

次に、(74) 式を $t=1,\cdots,T$ について stack し、

$$y_i-\iota\bar{y_i}=(X_i-\iota\bar{x_i})'\beta+\epsilon_i-\iota\bar{\epsilon_i} \tag{4}$$

と書く。これは、

$$y_i-\iota\bar{y_i}=y_i-\iota(\iota'\iota)^{-1}\iota'y_i=(I_T-\iota(\iota'\iota)^{-1}\iota')y_i=Q_Ty_i \tag{5}$$

のような変形を使えば、

$$Q_Ty_i=Q_TX_i\beta+Q_T\epsilon_i \tag{6}$$

と書ける（なお、$y_i=\alpha_i\iota+X_i\beta+\epsilon$ というモデルを Q_T を使って、(6) 式のように変換することを FE 変換と言う）。Q_Ty_i を Q_TX_i に回帰すれば、

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i'Q_T'Q_TX_i\right)^{-1}X_i'Q_T'Q_Ty_i$$

となるが、これは Q_T が対称でべき等[1]であることを用いれば、

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i'Q_TX_i\right)^{-1}X_i'Q_Ty_i$$

となり $\hat{\beta}_{FE}$ と一致することが分かる。

6　FE-2

6.1

前の問題から、$\hat{\beta}_{FE}$ は、

$$Q_Ty_i=Q_TX_i\beta+Q_T\epsilon_i \tag{7}$$

という式において、Q_Ty_i を Q_TX_i に回帰（OLS）して得られたものであった。従って、多変量の OLS の議論から、一致性については、誤差項 $Q_T\epsilon_i$ と回帰変数 Q_TX_i の直交性を示せば十分である。これは、仮定の（c）と条件付き期待値の tower property を用いて、

$$EX_i'Q_T\epsilon_i=EE[X_i'Q_T\epsilon_i|X_i]=EX_i'Q_TE[\epsilon_i|X_i]=0 \tag{8}$$

のように示すことができる。

漸近正規性についても多変量の OLS の一般論から、

$$\sqrt{NT}(\hat{\beta}_{FE}-\beta)\to_d N(0,(EX_i'Q_TX_i)^{-1}EX_i'Q_T\epsilon_i\epsilon_i'Q_TX_i(EX_i'Q_TX_i)^{-1}) \tag{9}$$

となることは即座に分かる。仮定（d）と条件付き期待値の tower property から漸近分散の中央の factor は、$\sigma_\epsilon^2EX_i'Q_TX_i$ となるため、漸近分散の形は、$\sigma_\epsilon^2(EX_i'Q_TX_i)^{-1}$ となることがわかる。

漸近分散の推定も多変量の OLS と同様である。

[1] Q_T がべき等であることは直接計算して確かめられるが、次のように射影の一般論を使って確認することもできる。まず、$\iota(\iota'\iota)^{-1}\iota'$ は ι が張る部分線形空間への射影作用素であるから、$Q_T=I_T-\iota(\iota'\iota)^{-1}\iota'$ は ι が張る部分空間の直交補空間への射影作用素である。射影作用素はべき等であるから、Q_T のべき等性が従う。

6.2

$\hat{\beta}_{FE}$ は FE 変換を施したデータに対する OLS 推定量であり、FE 変換の結果は、個別効果 α_i が確率的であっても、constant なパラメーターであっても変わらない。従って、個別効果 α_i が確率変数だとしても、これまでの議論に変更を加えることなしに一致性・漸近正規性が示せる。

7 density estimation

講義ノート参照

8 parametric, semiparametric and nonparametric methods

パラメトリックモデルを使えば、最尤法等を用いて効率的な推定を行うことができる。しかし、定式化に誤りがあれば、一致性・漸近正規性を失うことも少なくなく、一般的に頑健性は高くない。

一方、ノンパラメトリックな推定法は、確率密度や回帰関数にパラメトリックな定式化をすることなしに適用可能であるので、頑健性は非常に高い。しかし、収束のレートはパラメトリックモデルの場合の $\sqrt{n}$ よりも遅くなる。

セミパラメトリックモデルは、パラメーターがパラメトリックな部分とノンパラメトリックな部分に分けられるモデルのことを言い、通常パラメトリックな部分の推定に興味がある。セミパラメトリックモデルの利点は、定式化の誤りによるリスクをある程度抑えつつ、通常は、有限次元パラメーターをパラメトリックモデルの場合と同様に $\sqrt{n}$ のレートで推定出来る点である。しかし、パラメトリックモデルと比較すると、　効率性が落ちる（効率性限界が大きい、フィッシャー情報が小さい）、　一次の収束のオーダーは確かに $\sqrt{n}$ であるが、二次の収束のオーダーはパラメトリックモデルの場合よりも遅いといった短所がある。また、ノンパラメトリックモデルと比べると、頑健性が劣る。